Reverse Interval Operations

M. Nehmeier
University of Würzburg

January 14, 2010

1 Rationale

Arithmetic operators are introduced in motion 5, elementary functions in motion 10. Both motions follow the usual definition as power set operation and compute enclosures.

There are, however, situations where we look for enclosures of possible variables that fulfill a specific constraint. For these applications the reverse, relational or backward mode of the operations is helpful.

The Vienna proposal [2],therefore in table 3.8 and 3.9, specifies whether a reverse mode is necessary. In this motion we concentrate on the definition and description of reverse mode versions for the basic operators. It turns out, and has been discussed in the mailing list several times, that for the extended Interval Newton Method reverse multiplication is the proper choice when dividing by the derivative. In our definitions we follow the Vienna proposal, show that reverse addtion or subtraction is not necessary, and give detailed tables for reverse multiplication and division.

2 Definitions

Concerning the binary arithmetic operation

$$C = A \circ B \tag{1}$$

we define:

Definition 1 (Ternary reverse operations) *For a (partial) binary arithmetic operation $\circ$ there should be two ternary reverse interval operations $\circ_1^-$ and $\circ_2^-$ defined by*

$$\circ_1^-(B, C, X) := hull(\{x \in X \mid \exists b \in B,\, x \circ b \in C\}) \tag{2}$$

$$\circ_2^-(A, C, X) := hull(\{x \in X \mid \exists a \in A,\, a \circ x \in C\}) \tag{3}$$

with $A, B, C, X \in \overline{\mathbb{IR}}$

Definition 2 (Binary reverse operations) *For a (partial) binary arithmetic operation $\circ$ there should be two binary reverse interval operations $\circ_1^-$ and $\circ_2^-$ defined by*

$$\circ_1^-(B,C) := \circ_1^-(B,C,\mathbb{R}) = hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ x \circ b \in C\}) \tag{4}$$
$$\circ_2^-(A,C) := \circ_2^-(A,C,\mathbb{R}) = hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a \circ x \in C\}) \tag{5}$$

with $A, B, C \in \overline{\mathbb{IR}}$

Corollary 1 *For every $A, B, C, X \in \overline{\mathbb{IR}}$ the following equations hold*

$$\circ_1^-(B,C,X) = \circ_1^-(B,C) \cap X \tag{6}$$
$$\circ_2^-(A,C,X) = \circ_2^-(A,C) \cap X \tag{7}$$

Corollary 2 *If $\circ$ is commutativ then $\circ_1^-$ and $\circ_2^-$ are identical and we call both $\circ^-$.*

3 Reverse addition

$$\begin{aligned} +^-(A,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a + x \in C\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ a + x = c\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ x = c - a\}) \\ &= C - A \end{aligned}$$

4 Reverse subtraction

$$\begin{aligned} -_1^-(B,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ x - b \in C\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ \exists c \in C,\ x - b = c\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ \exists c \in C,\ x = c + b\}) \\ &= C + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -_2^-(A,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a - x \in C\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ a - x = c\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ -x = c - a\}) \\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ x = a - c\}) \\ &= A - C \end{aligned}$$

5 Reverse multiplication

$$\begin{aligned}\cdot^{-}(A,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\, a \cdot x \in C\})\\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\, \exists c \in C,\, a \cdot x = c\})\end{aligned}$$

6 Reverse division

$$\begin{aligned}/_1^{-}(B,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\, x/b \in C\})\\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\, \exists c \in C,\, x/b = c\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}/_2^{-}(A,C) &:= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\, a/x \in C\})\\ &= hull(\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\, \exists c \in C,\, a/x = c\})\end{aligned}$$

A Tables

In the following tables we are specifing the reverse multiplication and the reverse division. The result is always the interval hull of a subset of $\mathbb{R}$. In the tables we display these subsets, because we don't want to loose information. This information can be added as a decoration [1] to the bare interval that is received by the hull operation.

[1] see motion 8.

$\cdot^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[a_1, a_2],\ a_2 < 0$	$[c_2 \bigtriangledown a_1, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[0, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, 0]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, c_1 \bigtriangleup a_1]$	$[0, 0]$
$[a_1, 0]$	$[c_2 \bigtriangledown a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \bigtriangleup a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 < 0 < a_2$	$(-\infty, c_2 \bigtriangleup a_2]$ $\cup[c_2 \bigtriangledown a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \bigtriangleup a_1]$ $\cup[c_1 \bigtriangledown a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, a_2]$	$(-\infty, c_2 \bigtriangleup a_2]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_1 \bigtriangledown a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 > 0$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, c_2 \bigtriangleup a_2]$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, 0]$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, c_2 \bigtriangleup a_1]$	$[0, c_2 \bigtriangleup a_1]$	$[c_1 \bigtriangledown a_2, c_2 \bigtriangleup a_1]$	$[0, 0]$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 < 0$	$(0, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[0, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, c_1 \bigtriangleup a_2]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, 0]$	$[c_2 \bigtriangledown a_2, 0)$	$[0, 0]$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 > 0$	$(-\infty, c_2 \bigtriangleup a_2]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_1 \bigtriangledown a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_2 \bigtriangledown a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \bigtriangleup a_1]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 > 0$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, 0)$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, 0]$	$[c_1 \bigtriangledown a_1, c_2 \bigtriangleup a_1]$	$[0, c_2 \bigtriangledown a_1]$	$(0, c_2 \bigtriangledown a_1]$	$[0, 0]$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 1: Reverse multiplication $\cdot^-$ with finite interval C

$\cdot^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_2 < 0$	$[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, 0]$	$[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 < 0 < a_2$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$ $\cup[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$ $\cup[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, a_2]$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$	$[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 < 0$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 > 0$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_2]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_2 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 > 0$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \triangle\!\!\!\!\div a_1]$	$[c_1 \triangledown\!\!\!\!\div a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 2: Reverse multiplication $\cdot^-$ with infinite interval C

$/_1^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2],\ b_2 < 0$	$[c_2 \bigtriangledown b_2, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[0, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, 0]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, c_1 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, 0]$	$(0, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[0, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, 0]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, 0)$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2],\ b_1 < 0 < b_2$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, 0)$ $\cup(0, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$[min(c_1 \bigtriangledown b_2, c_2 \bigtriangledown b_1),$ $max(c_1 \bigtriangleup b_1, c_2 \bigtriangleup b_2)]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, 0)$ $\cup(0, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$[0, b_2]$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, 0)$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, 0]$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$(0, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2],\ b_1 > 0$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, c_2 \bigtriangleup b_1]$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, 0]$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[c_1 \bigtriangledown b_1, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$(-\infty, b_2],\ b_2 < 0$	$[c_2 \bigtriangledown b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$[0, 0]$
$(-\infty, b_2],\ b_2 > 0$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[c_1 \bigtriangledown b_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, c_2 \bigtriangleup b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, +\infty),\ b_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$(-\infty, c_1 \bigtriangleup b_1]$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, +\infty)$	$[c_2 \bigtriangledown b_1, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[0, 0]$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$[0, 0]$
$[b_1, +\infty),\ b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \bigtriangleup b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \bigtriangledown b_1, +\infty)$	$[0, 0]$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[0, 0]$

Table 3: Reverse division $/_1^-$ with finite interval C

$/_1^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2],\ b_2 < 0$	$[c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_1, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_2]$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_1, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2],\ b_1 < 0 < b_2$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, b_2]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_2]$	$[c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2],\ b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_2]$	$[c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$(-\infty, b_2],\ b_2 < 0$	$[c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_2]$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, b_2],\ b_2 > 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, +\infty),\ b_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, +\infty),\ b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \mathbin{\dot{\bigtriangleup}} b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \mathbin{\dot{\bigtriangledown}} b_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 4: Reverse division $/_1^-$ with infinite interval C

$/_2^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[a_1, a_2],\ a_2 < 0$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$\emptyset$
$[a_1, 0]$	$(0, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 < 0 < a_2$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, 0)$ $\cup(0, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, 0)$ $\cup(0, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, a_2]$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 > 0$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$\emptyset$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 < 0$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, +\infty)$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$(-\infty, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$\emptyset$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 > 0$	$[a_2 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_2 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_1, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 > 0$	$(-\infty, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, a_1 \mathbin{\bigtriangleup\!\!\!\!\!\div} c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, +\infty)$	$[a_1 \mathbin{\bigtriangledown\!\!\!\!\!\div} c_2, +\infty)$	$\emptyset$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$

Table 5: Reverse division $/_2^-$ with finite interval C

$/_2^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_2 < 0$	$(0, a_1 \triangle\!\!\!\!\div\, c_2]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$[a_1 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_1, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, 0]$	$(0, a_1 \triangle\!\!\!\!\div\, c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_1, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 < 0 < a_2$	$[a_2 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_2, 0)$ $\cup(0, a_1 \triangle\!\!\!\!\div\, c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_1, 0)$ $\cup(0, a_2 \triangle\!\!\!\!\div\, c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, a_2]$	$[a_2 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_2, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, a_2 \triangle\!\!\!\!\div\, c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2],\ a_1 > 0$	$[a_2 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_2, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, a_2 \triangle\!\!\!\!\div\, c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 < 0$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2],\ a_2 > 0$	$[a_2 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_2, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_2 \triangle\!\!\!\!\div\, c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_1 \triangle\!\!\!\!\div\, c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1 \bigtriangledown\!\!\!\!\div\, c_1, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty),\ a_1 > 0$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$

Table 6: Reverse division $/_2^-$ with infinite interval C

References

[1] IEEE Interval Standard Working Group - P1788, January 2009. `http://grouper.ieee.org/groups/1788/`.

[2] Arnold Neumaier. Vienna proposal for interval standardization, Final version, December 2008. in [1].