Motion 11.01: Basic Reverse Interval Operations

M. Nehmeier
University of Würzburg

February 8, 2010

1 Rationale

Arithmetic operators are introduced in motion 5, elementary functions in motion 10. Both motions follow the usual definition as power set operation and compute enclosures.

There are, however, situations where we look for enclosures of possible variables that fulfill a specific constraint. For these applications the reverse, relational or backward mode of the operations is helpful.

The Vienna proposal [2], therefore in table 3.8 and 3.9, specifies whether a reverse mode is necessary. In this motion we concentrate on the definition and description of reverse mode versions for the basic operators to have a process analogous to motion 5 and 10.

It turns out, and has been discussed in the mailing list several times, that for the extended Interval Newton Method reverse multiplication is the proper choice when dividing by the derivative. In our definitions we follow the Vienna proposal, show that reverse addtion or subtraction is not necessary, and give detailed tables for reverse multiplication and division.

2 Reverse operations

Concerning the binary arithmetic operation

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

we define:

Definition 1 (Ternary reverse operations) *For a (partial) binary arithmetic operation $\circ$ there are two ternary reverse power set operations*

$$\circ_1^- : \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \to \wp(\mathbb{R}) \tag{2}$$
$$\circ_2^- : \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \to \wp(\mathbb{R}) \tag{3}$$

defined by

$$\circ_1^-(B, C, X) := \{x \in X \mid \exists b \in B,\ x \circ b \in C\} \tag{4}$$
$$\circ_2^-(A, C, X) := \{x \in X \mid \exists a \in A,\ a \circ x \in C\} \tag{5}$$

with $A, B, C, X \in \wp(\mathbb{R})$

Definition 2 (Binary reverse operations) *For a (partial) binary arithmetic operation* $\circ$ *there are two binary reverse power set operations*

$$\circ_1^- : \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \to \wp(\mathbb{R}) \tag{6}$$
$$\circ_2^- : \wp(\mathbb{R}) \times \wp(\mathbb{R}) \to \wp(\mathbb{R}) \tag{7}$$

defined by

$$\circ_1^-(B, C) := \circ_1^-(B, C, \mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ x \circ b \in C\} \tag{8}$$
$$\circ_2^-(A, C) := \circ_2^-(A, C, \mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a \circ x \in C\} \tag{9}$$

with $A, B, C \in \wp(\mathbb{R})$

Corollary 1 *For every* $A, B, C, X \in \wp(\mathbb{R})$ *the following equations hold*

$$\circ_1^-(B, C, X) = \circ_1^-(B, C) \cap X \tag{10}$$
$$\circ_2^-(A, C, X) = \circ_2^-(A, C) \cap X \tag{11}$$

Corollary 2 *If* $\circ$ *is commutative then* $\circ_1^-$ *and* $\circ_2^-$ *are identical and we call both* $\circ^-$.

2.1 Basic operations

Definition 3 (Reverse addition)

$$\begin{aligned} +^-(A, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a + x \in C\} \qquad (12) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ a + x = c\} \end{aligned}$$

Definition 4 (Reverse subtraction)

$$\begin{aligned} -_1^-(B, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ x - b \in C\} \qquad (13) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B,\ \exists c \in C,\ x - b = c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -_2^-(A, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ a - x \in C\} \qquad (14) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ \exists c \in C,\ a - x = c\} \end{aligned}$$

Corollary 3 *The operations for reverse addtion and subtraction can be rewritten as:*

$$+^{-}(A, C) = C - A \tag{15}$$
$$-_1^{-}(B, C) = C + B \tag{16}$$
$$-_2^{-}(A, C) = A - C \tag{17}$$

Proof:

$$\begin{aligned} +^{-}(A, C) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, a + x = c\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, x = c - a\} \\ &= C - A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -_1^{-}(B, C) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B, \exists c \in C, x - b = c\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B, \exists c \in C, x = c + b\} \\ &= C + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -_2^{-}(A, C) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, a - x = c\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, -x = c - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, x = a - c\} \\ &= A - C \end{aligned}$$

□

Definition 5 (Reverse multiplication)

$$\begin{aligned} \cdot^{-}(A, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, a \cdot x \in C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, a \cdot x = c\} \end{aligned} \tag{18}$$

Definition 6 (Reverse division)

$$\begin{aligned} /_1^{-}(B, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B, x/b \in C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B, \exists c \in C, x/b = c\} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} /_2^{-}(A, C) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, a/x \in C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists c \in C, a/x = c\} \end{aligned} \tag{20}$$

2.2 Reverse interval operations

For the defined basic operations the restriction of the domain from arbitrary subsets to intervals leads to a result set R, where R is either the empty set, one contiguous set or two disjoint contiguous sets.

$$\circ_1^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \wp(\mathbb{R}) \tag{21}$$

$$\circ_2^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \wp(\mathbb{R}) \tag{22}$$

The proof of this assertion follows from the tables 1,. . . ,6.

Hence, the P1788 interval standard shall define the following basic reverse operations:

Definition 7 (Reverse hull operations) *For the basic binary and ternary reverse power set operations* $\cdot^-$, $/_1^-$ *and* $/_2^-$ *there shall be appropriate binary and ternary reverse interval operations*

$$\bar{\cdot}^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{23}$$

$$\bar{/}_1^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{24}$$

$$\bar{/}_2^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{25}$$

$$\bar{\cdot}^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{26}$$

$$\bar{/}_1^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{27}$$

$$\bar{/}_2^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \tag{28}$$

returning hull(R) *where* R *is the result set of the reverse power set operations.*

An implementation may provide reverse hull operations for addition and subtraction.

Definition 8 (Reverse pair operations) *For the basic binary and ternary reverse power set operations* $\cdot^-$, $/_1^-$ *and* $/_2^-$ *there shall be appropriate binary and ternary reverse interval operations*

$$\hat{\cdot}^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{29}$$

$$\hat{/}_1^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{30}$$

$$\hat{/}_2^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{31}$$

$$\hat{\cdot}^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{32}$$

$$\hat{/}_1^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{33}$$

$$\hat{/}_2^- : \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \to \overline{\mathbb{IR}} \times \overline{\mathbb{IR}} \tag{34}$$

by applying the following rules:

- *if the result set* $R = R_1 \cup R_2$ *and* $hull(R_1) \cap hull(R_2) = \emptyset$ *then return* $hull(R_1) \times hull(R_2)$
- *otherwise return* $hull(R) \times \emptyset$

Remark: On level 2 each *hull* in definition 8 shall be replaced with $hull_{\mathbb{F}}$.

A Tables

In the following tables we specify the reverse multiplication and division. We display power set operations, from which the reverse hull or pair operations can easily be deduced.

The tables are not normative. They intensionally list all different cases.

$\cdot^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[a_1, a_2]$, $a_2 < 0$	$[c_2/a_1, c_1/a_2]$	$[0, c_1/a_2]$	$[c_2/a_2, c_1/a_2]$	$[c_2/a_2, 0]$	$[c_2/a_2, c_1/a_1]$	$[0, 0]$
$[a_1, 0]$	$[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 < 0 < a_2$	$(-\infty, c_2/a_2]$ $\cup[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$ $\cup[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, a_2]$	$(-\infty, c_2/a_2]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 > 0$	$[c_1/a_1, c_2/a_2]$	$[c_1/a_1, 0]$	$[c_1/a_1, c_2/a_1]$	$[0, c_2/a_1]$	$[c_1/a_2, c_2/a_1]$	$[0, 0]$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 < 0$	$(0, c_1/a_2]$	$[0, c_1/a_2]$	$[c_2/a_2, c_1/a_2]$	$[c_2/a_2, 0]$	$[c_2/a_2, 0)$	$[0, 0]$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 > 0$	$(-\infty, c_2/a_2]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 > 0$	$[c_1/a_1, 0)$	$[c_1/a_1, 0]$	$[c_1/a_1, c_2/a_1]$	$[0, c_2/a_1]$	$(0, c_2/a_1]$	$[0, 0]$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 1: Reverse multiplication $\cdot^-$ with finite interval C

$\cdot^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_2 < 0$	$[c_2/a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2/a_2, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1/a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, 0]$	$[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 < 0 < a_2$	$(-\infty, c_2/a_2]$ $\cup[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$ $\cup[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, a_2]$	$(-\infty, c_2/a_2]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 > 0$	$(-\infty, c_2/a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2/a_1]$	$[c_1/a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 < 0$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2/a_2, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_2]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 > 0$	$(-\infty, c_2/a_2]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_1/a_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup[c_2/a_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_1/a_1]$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 > 0$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2/a_1]$	$[c_1/a_1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 2: Reverse multiplication $\cdot^-$ with infinite interval C

$/_1^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2]$, $b_2 < 0$	$[c_2 \cdot b_2, c_1 \cdot b_1]$	$[0, c_1 \cdot b_1]$	$[c_2 \cdot b_1, c_1 \cdot b_1]$	$[c_2 \cdot b_1, 0]$	$[c_2 \cdot b_1, c_1 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, 0]$	$(0, c_1 \cdot b_1]$	$[0, c_1 \cdot b_1]$	$[c_2 \cdot b_1, c_1 \cdot b_1]$	$[c_2 \cdot b_1, 0]$	$[c_2 \cdot b_1, 0)$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2]$, $b_1 < 0 < b_2$	$[c_1 \cdot b_2, 0)$ $\cup(0, c_1 \cdot b_1]$	$[c_1 \cdot b_2, c_1 \cdot b_1]$	$[min(c_1 \cdot b_2, c_2 \cdot b_1),$ $max(c_1 \cdot b_1, c_2 \cdot b_2)]$	$[c_2 \cdot b_1, c_2 \cdot b_2]$	$[c_2 \cdot b_1, 0)$ $\cup(0, c_2 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$[0, b_2]$	$[c_1 \cdot b_2, 0)$	$[c_1 \cdot b_2, 0]$	$[c_1 \cdot b_2, c_2 \cdot b_2]$	$[0, c_2 \cdot b_2]$	$(0, c_2 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, b_2]$, $b_1 > 0$	$[c_1 \cdot b_2, c_2 \cdot b_1]$	$[c_1 \cdot b_2, 0]$	$[c_1 \cdot b_2, c_2 \cdot b_2]$	$[0, c_2 \cdot b_2]$	$[c_1 \cdot b_1, c_2 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$(-\infty, b_2]$, $b_2 < 0$	$[c_2 \cdot b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$[0, 0]$
$(-\infty, b_2]$, $b_2 > 0$	$[c_1 \cdot b_2, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[c_1 \cdot b_2, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, c_2 \cdot b_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, c_2 \cdot b_2]$	$[0, 0]$
$[b_1, +\infty)$, $b_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, c_1 \cdot b_1]$	$(-\infty, c_1 \cdot b_1]$	$(-\infty, +\infty)$	$[c_2 \cdot b_1, +\infty)$	$[c_2 \cdot b_1, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[0, 0]$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$[0, 0]$
$[b_1, +\infty)$, $b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \cdot b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \cdot b_1, +\infty)$	$[0, 0]$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[0, 0]$

Table 3: Reverse division $/_1^-$ with finite interval C

$/_1^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2]$, $b_2 < 0$	$[c_2 \cdot b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \cdot b_1, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \cdot b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \cdot b_2]$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_2 \cdot b_1, +\infty)$	$(-\infty, c_1 \cdot b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2]$, $b_1 < 0 < b_2$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, b_2]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \cdot b_2]$	$[c_1 \cdot b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, b_2]$, $b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \cdot b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2 \cdot b_2]$	$[c_1 \cdot b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \cdot b_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$(-\infty, b_2]$, $b_2 < 0$	$[c_2 \cdot b_2, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_1 \cdot b_2]$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, b_2]$, $b_2 > 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, +\infty)$, $b_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$[b_1, +\infty)$, $b_1 > 0$	$(-\infty, c_2 \cdot b_1]$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[c_1 \cdot b_1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

Table 4: Reverse division $/_1^-$ with infinite interval C

$/_2^-$	$[c_1, c_2]$ $c_2 < 0$	$[c_1, 0]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 < 0 < c_2$	$[0, c_2]$	$[c_1, c_2]$ $c_1 > 0$	$[0, 0]$
$[a_1, a_2]$, $a_2 < 0$	$[a_2/c_1, a_1/c_2]$	$[a_2/c_1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, a_2/c_2]$	$[a_1/c_1, a_2/c_2]$	$\emptyset$
$[a_1, 0]$	$(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 < 0 < a_2$	$[a_2/c_2, 0)$ $\cup(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0)$ $\cup(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, a_2]$	$[a_2/c_2, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 > 0$	$[a_2/c_2, a_1/c_1]$	$(-\infty, a_1/c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_2, +\infty)$	$[a_1/c_2, a_2/c_1]$	$\emptyset$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 < 0$	$[a_2/c_1, +\infty)$	$[a_2/c_1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, a_2/c_2]$	$(-\infty, a_2/c_2]$	$\emptyset$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 > 0$	$[a_2/c_2, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 < 0$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 > 0$	$(-\infty, a_1/c_1]$	$(-\infty, a_1/c_1]$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_2, +\infty)$	$[a_1/c_2, +\infty)$	$\emptyset$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ $\cup(0, +\infty)$

Table 5: Reverse division $/_2^-$ with finite interval C

$/_2^-$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 < 0$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, c_2]$ $c_2 > 0$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 < 0$	$[0, +\infty)$	$[c_1, +\infty)$ $c_1 > 0$	$(-\infty, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_2 < 0$	$(0, a_1/c_2]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$[a_1/c_1, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[a_1, 0]$	$(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 < 0 < a_2$	$[a_2/c_2, 0) \cup(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0) \cup(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[0, a_2]$	$[a_2/c_2, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[a_1, a_2]$, $a_1 > 0$	$[a_2/c_2, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[0, 0]$	$\emptyset$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 < 0$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$(-\infty, 0]$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$(-\infty, a_2]$, $a_2 > 0$	$[a_2/c_2, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, a_2/c_1]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 < 0$	$(-\infty, 0) \cup(0, a_1/c_2]$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$[a_1/c_1, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$[a_1, +\infty)$, $a_1 > 0$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$

Table 6: Reverse division $/_2^-$ with infinite interval C

References

[1] IEEE Interval Standard Working Group - P1788, January 2009. http://grouper.ieee.org/groups/1788/.

[2] Arnold Neumaier. Vienna proposal for interval standardization, Final version, December 2008. in [1].